

APLICACION DE MODELOS AUTORREGRESIVOS A LA SIMULACION DE LAS CARACTERISTICAS FISICAS DE ENVASES DE VIDRIO.

GOMEZ-LERA, Ma. S.; MOLINA RUIZ, J.; ROS FELIP, A.; ALARCON, E.
Depto. Mecánica Estructural y Construcciones Industriales.
E.T.S. Ingenieros Industriales. U.P.M.
C/ José Gutiérrez Abascal, 2
28006 MADRID (España)

RESUMEN

Se presenta en este artículo la simulación de las características de envases de vidrio, mediante modelos Auto Regresivos (AR), siguiendo el enfoque Box-Jenkins.

El artículo se presenta en dos partes: en la primera, se demuestra la adecuación de un modelo $AR(2)$, para la simulación de los espesores a partir de las características estadísticas determinadas sobre cortes longitudinales de envases reales. En la segunda parte, se presenta la forma práctica que se ha desarrollado para la simulación de una muestra de veinte recipientes.

1. INTRODUCCION

En las últimas décadas se ha popularizado considerablemente la aplicación de los Modelos ARIMA (Auto Regressive Integrated Moving Average) al campo de la Ingeniería Mecánica y Estructural, con el fin de elaborar modelos del sistema estructural que permitan predecir con mayor fiabilidad su comportamiento.

El objetivo del presente artículo es el estudio de las tensiones que aparecen en un recipiente de vidrio debido a la variación aleatoria de los espesores del mismo inherente a su proceso de fabricación; con ello será posible estimar las cargas probables de servicio.

El proceso de fabricación de envases de vidrio, actualmente utilizado, produce fuertes irregularidades en la geometría (Figs. 1, 2, 3 y 4), lo cual repercute directamente en la calidad de los mismos. Las piezas son fabricadas en serie por máquinas que soplan una burbuja de vidrio en el interior del molde; consecuencia de lo anterior es la falta de uniformidad de los espesores para un mismo envase y entre los producidos por una misma máquina.

Cuando estos recipientes contienen bebidas carbónicas, las irregularidades en el espesor pueden ser un factor más en el riesgo de rotura, con la consiguiente explosión y posibles lesiones para el consumidor.

Con el fin de realizar un estudio estadístico de las tensiones máximas en una población de envases se hace necesario conocer la variación de espesores en la población real, o bien disponer de un modelo estadístico para simular una población ficticia.

En este artículo se pretende obtener un modelo estadístico que permita simular una población de recipientes, a partir del cual sea posible, mediante un tratamiento con el M.E.F., obtener las tensiones que se producen como consecuencia de una presión interna proporcionada por la bebida carbónica contenida en su interior.

2. DATOS DE PARTIDA

Normalmente los modelos ARIMA son utilizados para el estudio de series temporales, pero en esta ocasión serán aplicados a una serie en la que la variable homogénea no será el tiempo, sino el espacio. Para cada envase fabricado, el espesor de la pared en un corte longitudinal es una variable a lo largo de la altura que se interpretará como la realización de un proceso estocástico.

Para este trabajo se utilizarán los datos que se obtuvie-

ron cortando piezas y midiendo directamente el espesor de la pared en 34 puntos a lo largo de la altura, con una separación de 1 cm entre cada dos puntos, y comenzando por la boca del envase. Cuatro series de estos espesores, medidos en milímetros, se hallan recogidos en la figura 1.

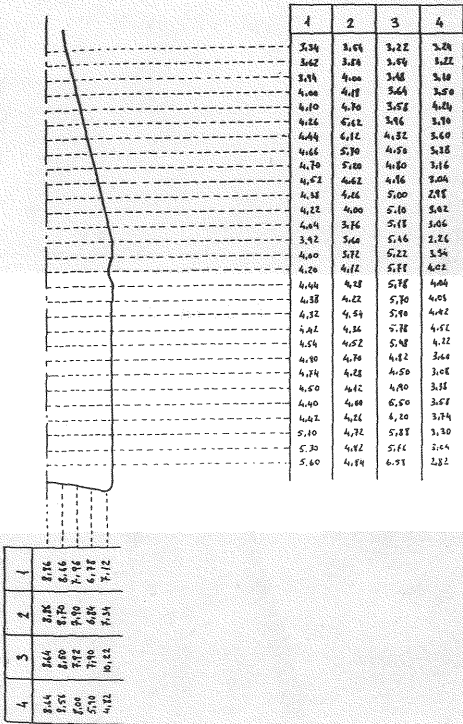


FIGURA 1

El espesor nominal de estos envases es de 4,2 y el mínimo de 2 mm. En las figuras 2, 3 y 4 se muestran fotografías de secciones de distintos recipientes a cotas diferentes.

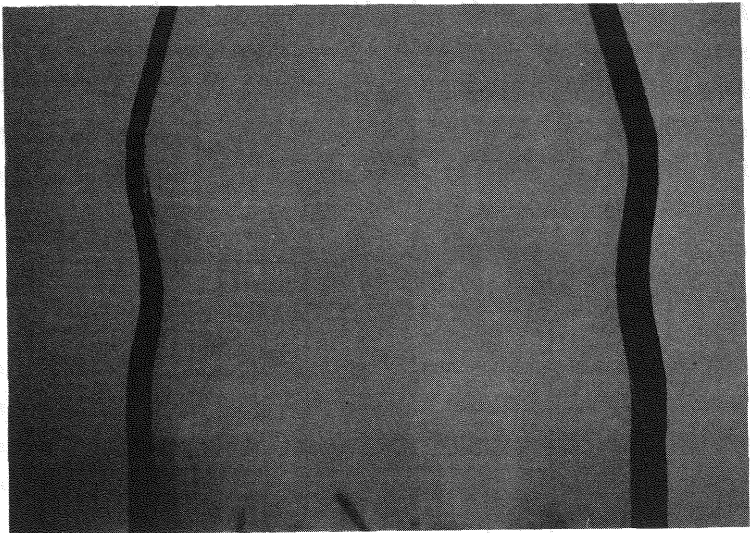


FIGURA 2

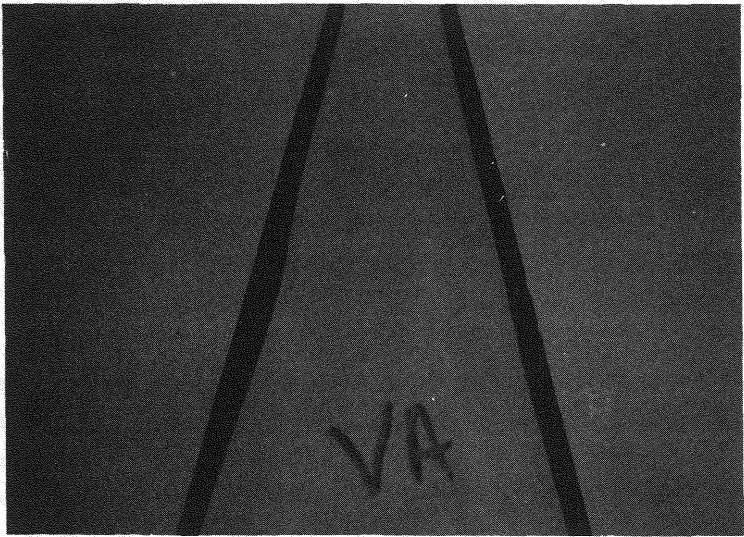


FIGURA 3

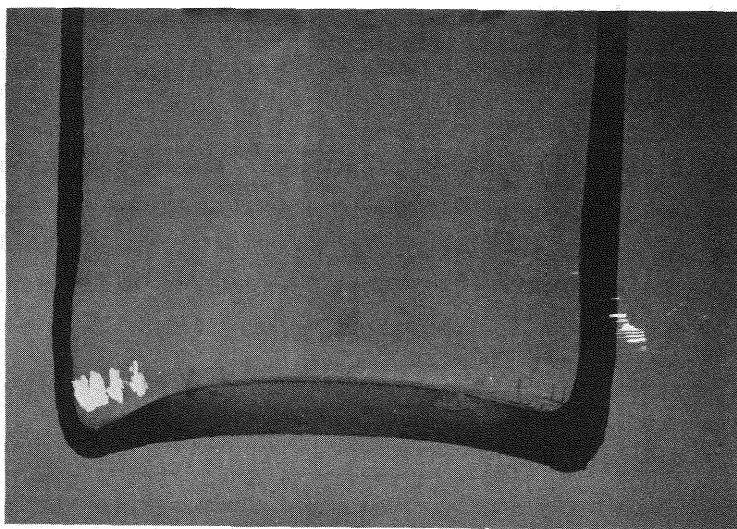


FIGURA 4 (CONTINUA)

3. IDENTIFICACION DEL MODELO

Dada una serie temporal univariante Z_t , se define el operador B mediante:

$$B Z_t = Z_{t-1}$$

y un modelo ARIMA (P, d, q) se escribe en la forma:

$$\phi_p(B) (1 - B)^d Z_t = \theta_q(B) a_t$$

siendo a_t un ruido blanco.

La parte autorregresiva del modelo (AR) queda recogida en el polinomio:

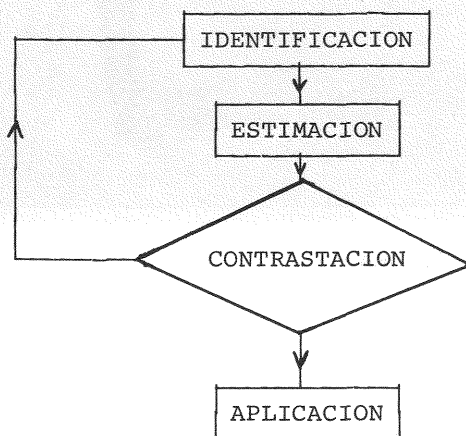
$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

la parte integral (I) en el término $(1-B)^d$ y la parte de media

móvil (MA) en el polinomio:

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

La metodología Box-Jenkins consiste en un procedimiento de análisis y aprendizaje mediante la interacción con el ordenador como herramienta de cálculo. Dicho procedimiento se halla esquematizado en el siguiente diagrama.



La identificación del modelo se basa en la elección de los grados p , d y q , mientras que la estimación es el cálculo de los coeficientes $\phi_1 \dots \phi_p$ y $\theta_1 \dots \theta_q$.

Las ayudas utilizadas en la identificación son las funciones de autocorrelación simple y autocorrelación parcial, así como las representaciones gráficas, aparte de la experiencia del analista.

Siguiendo la metodología Box-Jenkins para el análisis de series temporales, el primer paso a realizar será la identificación del modelo dentro de la familia ARIMA. Para ello se ha trabajado en base a una realización tipo del proceso -serie de espesores en un envase- calculando sus funciones de autocorrelación simple y parcial con ayuda del programa TSP (Time Series - Processor, referencias [4] y [5]).

En la figura A aparece una representación de la realización en estudio y en la figura B se muestran las funciones de autocorrelación, calculadas por dicho programa.

A la vista de la figura B, probablemente el modelo más plausible sea un AR(2), puesto que la función de autocorrelación simple presenta una forma ondulante con una amplitud que decae suavemente y la función de autocorrelación parcial sólo tiene dos coeficientes significativos: el primero y el segundo.

4. SIMULACION DE ESPESORES. FORMA PRACTICA

En base al apartado anterior, se van a simular, mediante un modelo AR(2) los espesores en función de la altura. El proceso tiene la forma:

$$e(Z) = e_m + \phi_1 e(Z - \Delta Z) + \phi_2 e(Z - 2\Delta Z) + \epsilon_Z \quad (1)$$

donde:

$e(Z)$ = espesor a una altura Z .

e_m = espesor nominal.

$e(Z - \Delta Z)$, $e(Z - 2\Delta Z)$ = espesores vecinos al estudiado.

ϵ_Z = variable aleatoria denominada "RUIDO BLANDO" con las siguientes características.

* Media, m_{ϵ} nula

$$m_{\epsilon} = E[\epsilon_Z] = 0; \quad \forall Z \quad (2)$$

* Varianza constante

$$E[\epsilon_Z]^2 = \sigma_{\epsilon}^2; \quad \forall Z \quad (3)$$

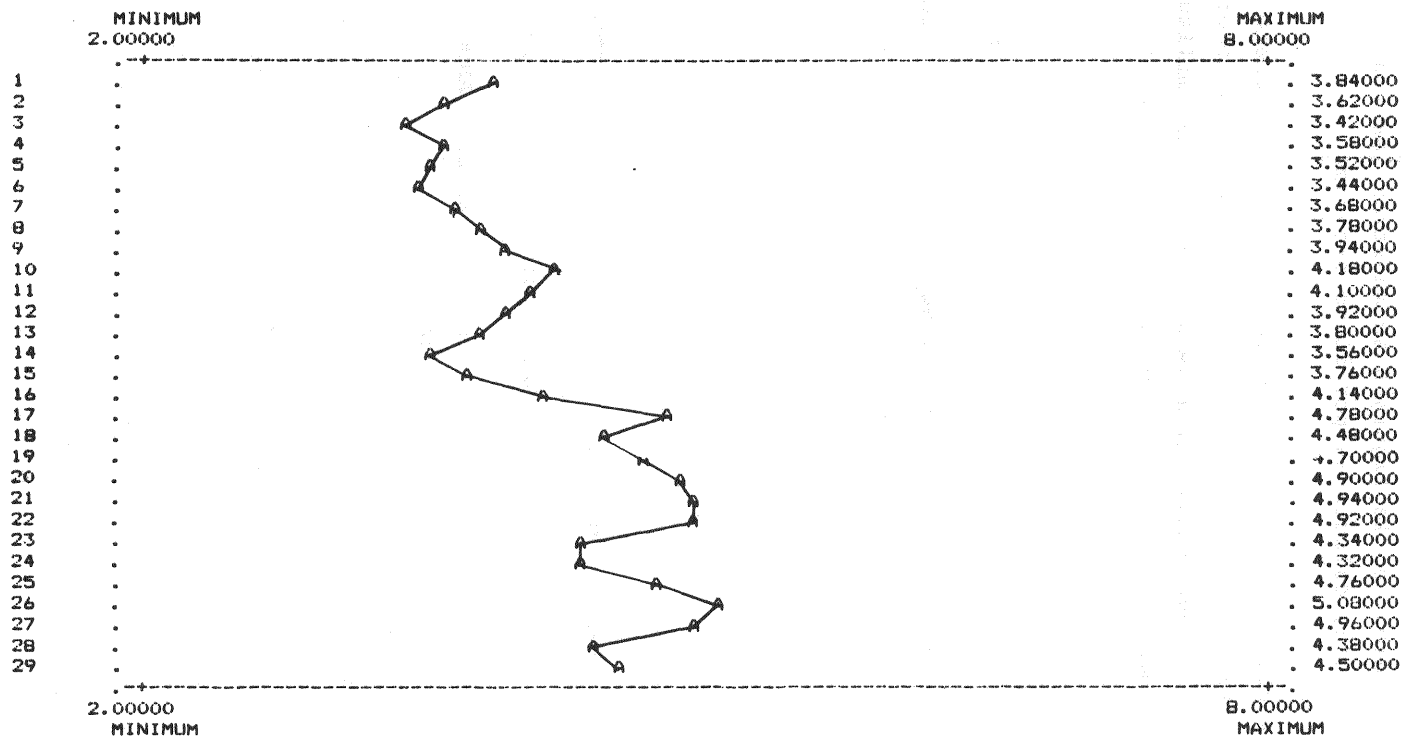
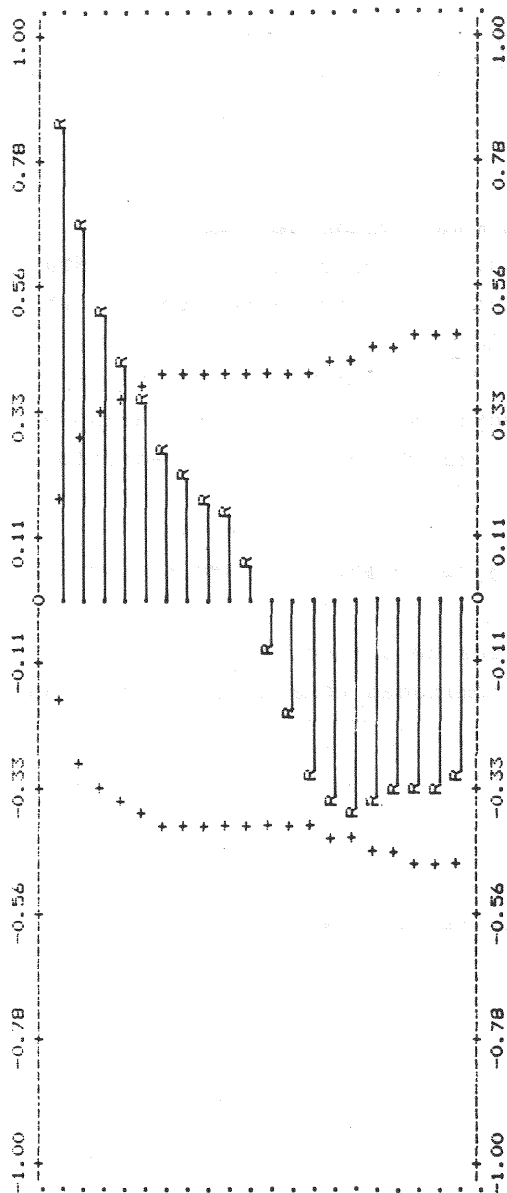


FIGURA A

AUTOCORRELATION FUNCTION OF THE SERIES (1-B) (1-B) ES



PARTIAL AUTOCORRELATION FUNCTION OF THE SERIES (1-B) (1-B) ES

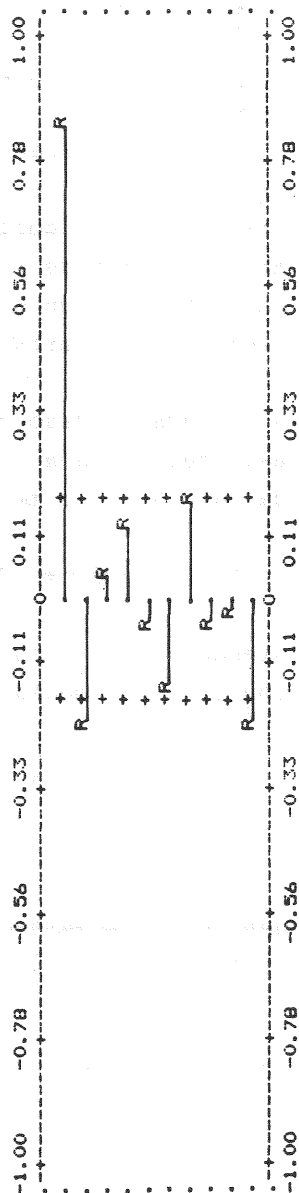


FIGURA B

* Cada variable ruido blanco influye solamente sobre los valores de e correspondientes a la misma altura, es decir:

$$E[\varepsilon_k \cdot e_j] = 0 ; \quad k \neq j \quad (4)$$

La justificación conceptual de este modelo se encuentra en el proceso físico de fabricación por soplado a partir del bulbo inicial con el gollete ya formado, donde se toma el origen de áreas. Ello hace razonable suponer que cada espesor no sea totalmente independiente del anterior, sino directamente dependiente del material ya gastado.

Para el caso que nos ocupa, modelo AR(2), la varianza σ_ε^2 , está relacionada con la varianza σ_e^2 del proceso aleatorio que se va a simular mediante la expresión:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_e^2 (1 - \rho_1 \phi_1 - \rho_2 \phi_2) \quad (5)$$

siendo ρ_1 y ρ_2 los coeficientes de autocorrelación relacionados con ϕ_1 y ϕ_2 , mediante las denominadas ecuaciones de Yule-Walker

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \quad (6)$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

que en forma matricial pueden escribirse:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

La determinación de ϕ_1 , ϕ_2 se realizará con una simple inversión.

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho_1^2 - 1} \begin{bmatrix} -1 & \rho_1 \\ \rho_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

o bien:

$$\phi_1 = \frac{\rho_1 (1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_1^2} \quad (10)$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

donde:

$$\rho_1 = \frac{E[e_i(Z+\Delta Z) \cdot e_i(Z)]}{E[e_i(Z) \cdot e_i(Z)]} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{E[e_i(Z+2\Delta Z) \cdot e_i(Z)]}{E[e_i(Z) \cdot e_i(Z)]} \quad (11)$$

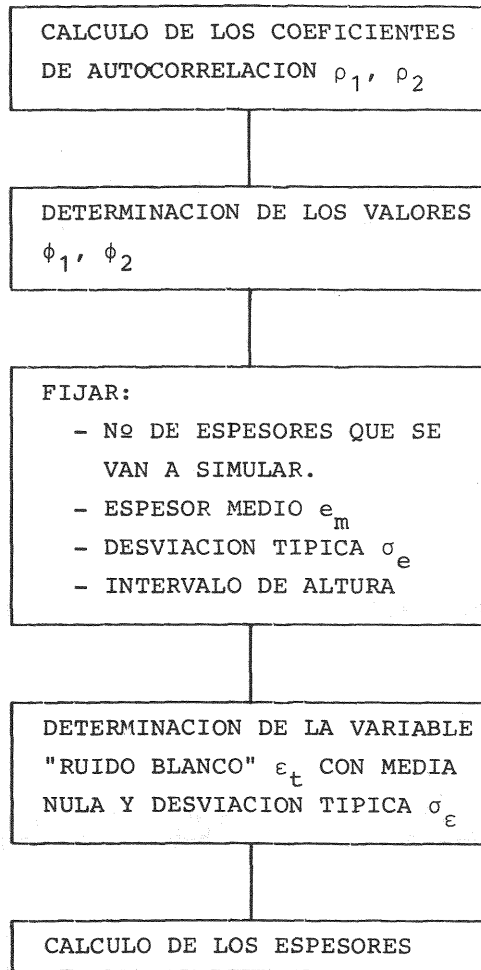
$$(12)$$

Por tanto, conocidos los coeficientes de autocorrelación, es posible determinar mediante (10) los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2 , y en consecuencia, la desviación típica σ_ϵ de la variable RUIDO BLANCO, a partir de la expresión (5).

Con la información anterior no es difícil generar el ruido blanco, con media y desviación típica conocida; para ello se ha seguido un método basado en el Teorema Central del Límite cuya

exposición puede encontrarse en Ref. [3].

El esquema del proceso puede resumirse de la siguiente forma:



5. EJEMPLO

En la figura 5 se presenta un envase tipo con simetría de revolución alrededor del eje vertical.

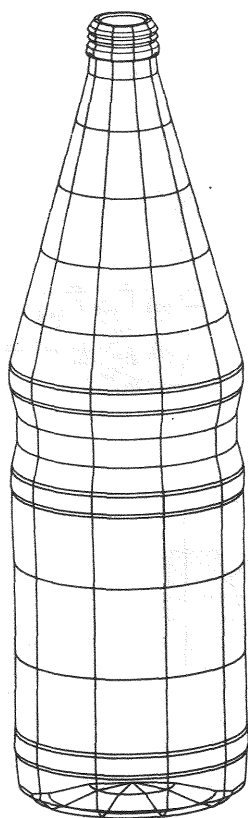
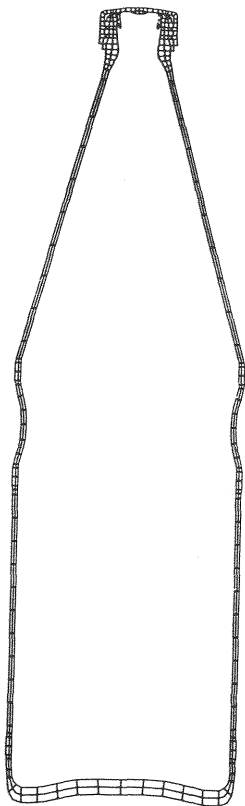


FIGURA 5

El cálculo de las tensiones se ha realizado mediante el - M.E.F., utilizando como modelo el presentado en la Figura 6. El envase se ha subdividido en anillos de sección tipo cuadrilátero curvilíneo, dentro de los cuales se aproximan los desplazamientos con polinomios de 4º grado como máximo.

La Figura 7 es una ampliación del gollete que recoge el detalle de los diferentes elementos que intervienen, para representar tanto el vidrio como el tapón que cierra el recipiente. En lo que se refiere al número y distribución de los elementos, se fija de modo que permita comprobar la situación en zonas de interés, tales como cambios de sección o transición de curvaturas. El nº de elementos que se ha utilizado es de 153 y el nº -

de nodos 347.



MALLA DE ELEMENTOS FINITOS EN LA SECCION MERIDIANA

FIGURA 6

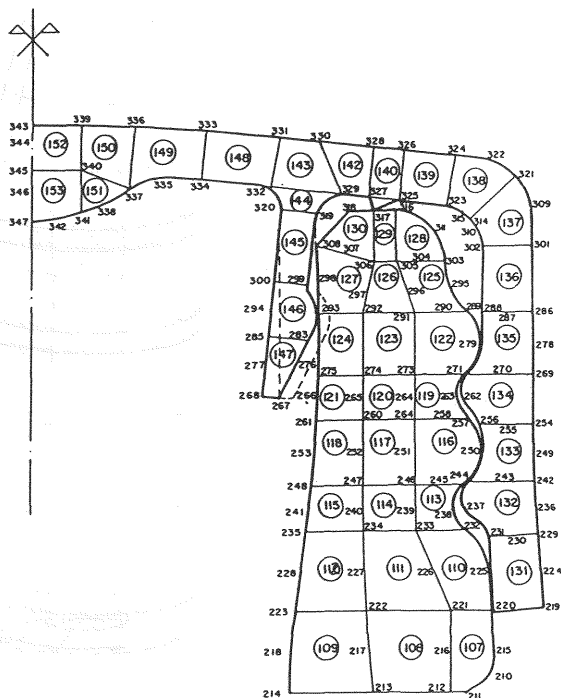


FIGURA 7

Los valores de ϕ_1 y ϕ_2 se obtuvieron a partir de las medidas realizadas sobre cortes longitudinales de envases reales, Figura 1, obteniéndose en primera instancia las medidas de autocorrelación y a partir de ellas los siguientes valores:

$$\phi_1 = 0,415$$

$$\phi_2 = 0,082$$

En lo que se refiere a los valores de e_m y σ_e^2 , se presentan tres casos dependientes de la zona de la botella cuyo espesor se pretende simular.

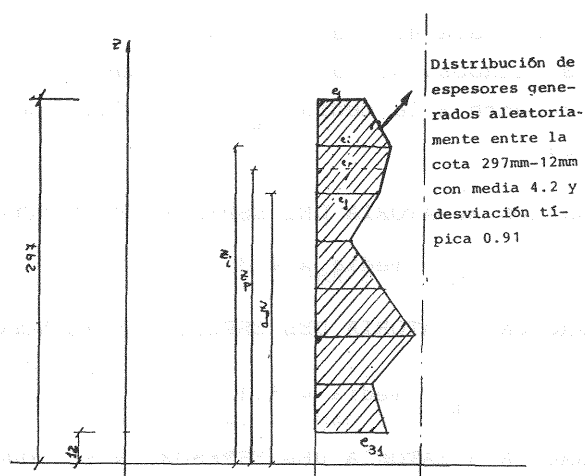
A.- PARED

Según las especificaciones de fabricación se ha considerado:

$$e_m = 4,2$$

$$\sigma_e = 0,91$$

simulándose por el procedimiento anteriormente citado 31 espesores igualmente espaciados entre la cota 297 y 12, lo que proporciona un $\Delta Z = 9,5$ mm.



$$e_p = \frac{e_i - e_f}{z_i - z_f} (z_p - z_i) + e_i$$

siendo:

$$z_i - z_f = \Delta z = 9.5 \text{ mm}$$

INTERPOLACION DE ESPESORES PARA LOS NODOS DE LA PARED

FIGURA 8

Como el número de nodos del modelo, comprendidos entre las cotas 297 mm y 12 mm es mayor que los 31 espesores generados, los espesores para cada uno de es-

tos nodos se obtienen interpolando linealmente entre los valores más próximos. Figura 8.

B.- ESQUINA

Con esta denominación se designa a los nodos 21, 24, 27 y 29; en este caso sería necesario generar 4 espesores; sin embargo, estudios estadísticos demuestran que para obtener una aproximación razonablemente buena de una distribución normal es necesario tomar un número de espesores superior o igual a 10.

Por ello, para generar la distribución ϵ_t en los cuatro nodos citados, se ha tomado una muestra de 12 valores; referente a la media e_m pueden distinguirse cuatro casos:

1.B.- GENERACION ALEATORIA DEL ESPESOR EN EL NODO 21.

$$e_m = \text{media} = 4.3$$

2.B.- GENERACION ALEATORIA DEL ESPESOR EN EL NODO 24.

$$e_m = \text{media} = 5.1$$

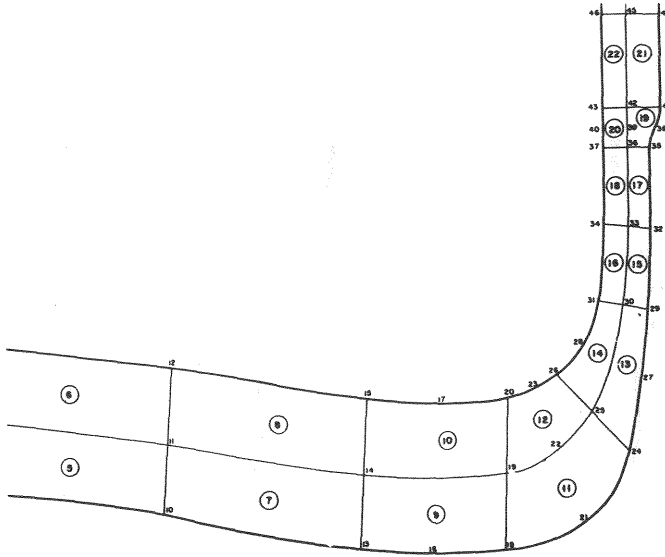
3.B.- GENERACION ALEATORIA DEL ESPESOR EN EL NODO 27.

$$e_m = \text{media} = 6.5$$

4.B.- GENERACION ALEATORIA DEL ESPESOR EN EL NODO 29.

$$e_m = \text{media} = 8$$

en los cuatro casos se ha considerado una desviación típica $= \sigma_e = 0.55$. Por último los espesores que se buscan corresponden al tercer valor de las cuatro muestras generadas.



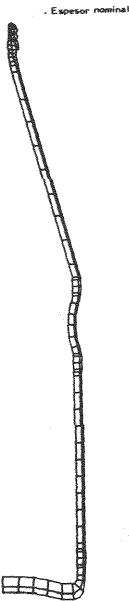
DETALLE DEL FONDO

FIGURA 9

C.- FONDO

Los espesores se han generado en este caso con los 7 primeros valores de una muestra de 14 con media $e_m = 8.4$ y desviación típica $\sigma_e = 0.8$.

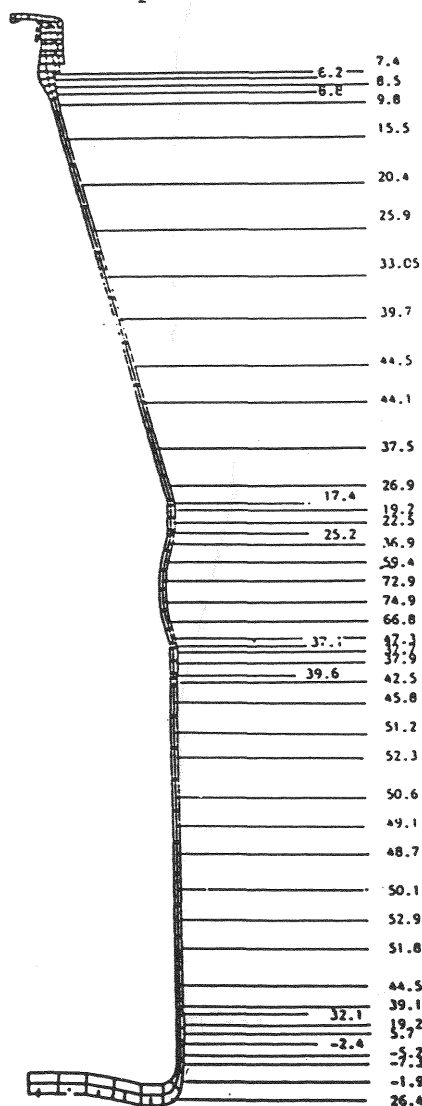
Una vez determinados los parámetros representativos del proceso aleatorio se ha procedido a simular en el ordenador una familia de 18 envases, algunos de los cuales se recogen en las Figuras siguientes, numerados de la 3 a la 20, a los que se añadieron los correspondientes a la de espesor mínimo (nº 1) (2 mm para la pared y 6 mm para el fondo) y a la de espesor nominal (nº 2) (4.8 mm para la pared y 8.4 mm para el fondo).





Simulados los envases se procedió a calcular las tensiones en los distintos elementos, y con los resultados obtenidos se realizó un tratamiento estadístico. La figura que se indica a continuación, por ejemplo, recoge los valores de las tensiones desarrolladas en la pared del recipiente cuando se toma como valor característico la media más 1,64 veces la desviación típica. Se observa que el valor pésimo es de unos 75 Kg/cm^2 y lo mismo sucede con las tensiones en el fondo del envase. Todos estos valores corresponden a una presión interna de 4 Kg/cm^2 .

TENSION CARACTERISTICA, COMPONENTE CIRCUNFERENCIAL (Kg/cm^2)
Presión Interna = 4 Kg/cm^2



Se observa que la irregularidad de los espesores aumenta notablemente el valor de cálculo (60 Kg/cm^2) ideal, pero el límite está relativamente alejado de las resistencias potenciales del vidrio.

6. REFERENCIAS

- |1| - KAPANIA R.K. & YANG, T.Y. (1984)
Time Domain Random Wind Response of Cooling Tower.
Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 110, No 10,
pp. 1524-1543. Oct.

- |2| - VANDAELE, W. (1983)
Applied Time Series and Box-Jenkins Models.
Academic Press.

- |3| - URIEL, E. (1985)
Análisis de Series Temporales, Modelos ARIMA.
Paraninfo.

- |4| - TSP. (1983)
User's Guide, Versión 4.0.
TSP Internacional.

- |5| - TSP. (1983)
Reference Manual, Versión 4.0.
TSP Internacional.